Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
28 Juni 2005, 09.00–12.00 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:
$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x,x) = \frac{x}{2}.$$
Controleer het antwoord en schets de karakteristieken.

2. Beschouw de warmte-vergelijking
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
met de condities
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$
Laat zien dat voor elke functie $f(x)$, $0 < x < \pi$, met $|f(x)| \leq 1$, geldt dat voor voldoend grote t:
$$|u(x,t)| \leq 2\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$
Neem aan dat $f(x)$ gegeven wordt door
$$f(x) = 0, \quad 0 < x \leq \pi/2, \quad f(x) = 1, \quad \pi/2 < x \leq \pi.$$
Bepaal de (formele) reeeksontwikkeling van de oplossing $u(x,t)$.

3. Geef in elk punt van $\mathbb{R}^2$ de klassificatie van de vergelijking
$$(\sin x)^2 u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0,$$
en bepaal, waar mogelijk, de karakteristieken. Schets de situatie.

4. De volgende partiële differentiaalvergelijking beschrijft zogenaamde minimale oppervlakken:
$$(1 + (u_y)^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + (u_x)^2)u_{yy} = 0.$$
Bepaal een oplossing van deze niet-lineaire vergelijking door 'additieve scheiding van variabelen': $u(x,y) = X(x) + Y(y)$, waarbij gemakshalve $X(0) = X'(0) = 0$ en $Y(0) = Y'(0) = 0$ gesteld wordt.

5. Geef op het vierkant $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < \pi \,\}$ een formele oplossing voor het Dirichlet probleem
$$\Delta u = 0,$$
waarbij $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < \pi$, en $u(x,y) = 0$ op de andere drie zijden van de rand van Ω.